Las geociencias y el lenguaje matemático

Ludger O. Suárez-Burgoa (PhD.)

Profesor Asistente en dedicación exclusiva
Facultad de Minas - Universidad Nacional de Colombia

24 de noviembre de 2014

Resumen

Esta presentación tiene el objeto de persuadir al ingeniero geólogo (y demás profesionales afines) para que se aventure al fantástico mundo de la matemática aplicada a la geología.La matemática es la ciencia básica de lo abstracto, que su desarrollo ha logrado crear el marco conceptual de las demás ciencias transformando lo abstracto en modelos reales a través de la matemática aplicada.

Lo que se expondrá aquí serán ejemplos sencillos para mostrar al profesional que es posible usar la matemática en todos los campos de su desempeño, y que encontrará gratos momentos en poder expresar sus ideas en un lenguaje matemático. Se hará énfasis en ejemplos tomados para el uso y entendimiento de la geología, solo por la tendencia que tiene el expositor al estudio de esta ciencia. Pero eso no significa que uno no pueda hacer la tarea de matematización de cualquier problema de profesional.

¿Cuánto es $2+2$?

- matemático: “Es igual a 4 con la siguiente demostración.”;
- ingeniero: “Se encuentra entre 3.98 y 4.02.”;
- físico: “Está en la magnitud de 1×10^1.”;
- geólogo: “En la escala de números, dos más dos aparece antes de cinco y después de tres.”;
- sociólogo: “No se la respuesta, pero discutamos esta tan importante pregunta y lleguemos a un acuerdo.”;
- abogado: “En el juicio entre Pérez y el Estado, dos más dos $(2+2)$ se declaró que sea igual a cuatro (4).”;
- contador: “¿Cuánto quieres que valga?”.

Matemática en geología

Una estudiante de bachillerato interesado en escoger su futuro profesional preguntaba en las redes sociales.

> Victoria (Argentina) dice: [diciembre 15, 2010 a las 10:02 am]
> Hola, el otro día te pregunté porque dije que me gustaba mucho geología, pero *soy pésima para matemáticas*. En realidad te soy sincera, soy mala de naturaleza pero también es que me falta práctica, osea estoy en el colegio y siempre me la llevo de vaga …siempre me gustaron muchas carreras, pero cuando me entero que hay que saber matemáticas las dejo a un lado y ya estoy cansada porque siempre MATEMÁTICA ¡Me aplasta todas las ilusiones!

Matemática en geología

No es correcto pensar que la geología (la que le llaman muchas veces como *geología pura*) usa menos matemática que la *ingeniería geológica*. La geología es una ciencia y la ingeniería es una disciplina práctica; por tanto la geología usa mucho más matemática que la ingeniería geológica, y no al revés.

Ahora les pregunto la inquietud de Victoria, pero mejor estructurada: ¿Cuánta matemática cree usted que se necesita para ser geólogo o ingeniero geólogo?

¿Cuánta matemática se necesita para ser geólogo (ingeniero geólogo)?

- ☐ Al nivel avanzado de álgebra, pre-cálculo.
- ☐ Al nivel avanzado de lo anterior y geometría del espacio (geometría tridimensional).
- ☐ Al nivel avanzado de lo anterior y álgebra vectorial, matricial y tensorial.
- ☐ Al nivel avanzado de lo anterior y el análisis matemático de ecuaciones diferenciales parciales, hasta la dimensión $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Al nivel intermedio de lo anterior y estadística descriptiva en $\mathbb{R}^n$.
- ☐ Al nivel intermedio de lo anterior y topología.

Definiciones de apoyo

Álgebra Rama de la matemática que emplea números, letras y signos para poder hacer referencia a múltiples operaciones aritmética.

Pre-cálculo Forma avanzada de álgebra; incluye típicamente una revisión de álgebra y trigonometría, así como una introducción a las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, a los vectores, a los números complejos, a las secciones cónicas, y a la geometría analítica.

Geometría del espacio Rama de la matemática encargada de las propiedades y medida de la extensión de las formas que se pueden expresar con medidas y de las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos y sólidos en el espacio para definir sus condiciones mediante unas propiedades determinadas del espacio.

Álgebra tensorial Parte del álgebra abstracta, donde se crea un álgebra a partir de una base, un producto, una suma sobre un objeto (entidad algebraica) que es un tensor. El tensor es una generalización del escalar, el vector y la matriz independiente de cualquier sistema coordenado.

Análisis matemático Rama de la matemática que estudia los números reales, los complejos y construcciones derivadas a partir de ellos, así como las funciones entre esos conjuntos y construcciones derivadas. Se empieza a desarrollar a partir del inicio de la formulación rigurosa del cálculo y estudia conceptos como la continuidad, la integración y la diferenciabilidad de diversas formas.

Estadística descriptiva Rama de la estadística que se dedica a recolectar, ordenar, analizar y representar un conjunto de datos (sea en en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\ldots$, $\mathbb{R}^n$), con el fin de describir apropiadamente las características de este.

Topología Rama de la matemática dedicada al estudio de aquellas propiedades de los cuerpos geométricos que permanecen inalteradas por transformaciones continuas; estudia las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas.

Mitos y verdades

La matemática es:

- complicada y difícil de entender;
- abstracta;
- desvinculada del interés profesional;
- hay que nacer con la habilidad matemática.

De las tres afirmaciones, las dos últimas son mitos.

La matemática es complicada y difícil de entender hasta para los grandes matemáticos; por ser altamente abstracta.

Informática o solo ofimática

La informativa estudia la estructura, los algoritmos, el comportamiento y la interacción de sistemas naturales y artificiales que almacena, proceso, accede y comunica información.

La ofimática se designa al conjunto de técnicas, aplicaciones y herramientas informáticas que se utilizan en funciones de oficina para optimizar, automatizar, y mejorar tareas y procedimientos relacionados. Las herramientas ofimáticas permiten idear, crear, manipular, transmitir, o almacenar, la información necesaria en una oficina.

Un alto porcentaje que se usa es sólo geometría

Por ejemplo, para dibujar una sección de túnel en un plano (*v.gr.* geometría en $\mathbb{R}^2$). Se necesita los conceptos de simetría, punto, línea y arco circular; y algo de trigonometría (*e.g.* teorema del seno).

Teorema 1. *Si en un triángulo ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos α, β y γ son respectivamente a, b, c, entonces*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{1}$$

Ejemplo Encuentre las coordenadas de los puntos que definen la sección transversal de la sección del túnel que se muestra en la Figura 1.

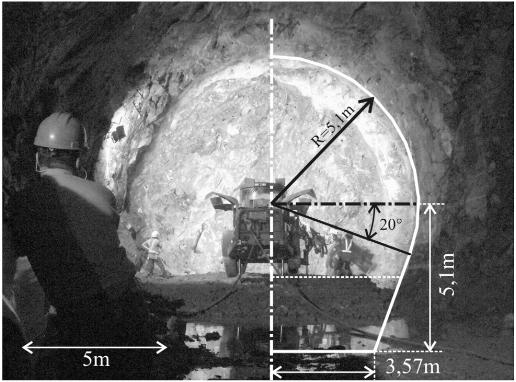


Figura 1: Túnel de conducción de Porce 3 [2].

Solución Definimos un sistema coordenado cartesiano dextrógiro en $\mathbb{R}^2$ con bases $\boldsymbol{e}^1 = (1, 0)$ y $\boldsymbol{e}^2 = (0, 1)$, y origen en el centro del arco de circunferencia del techo de la sección (Punto 6); es decir:

$$6 : \boldsymbol{x}_6 = (0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

El eje de simetría vertical de la sección es paralelo al eje de ordenadas y pasa por el punto 6.

Las variables que se conocen son: la altura total (H), el radio del arco de circunferencia del techo (r), y el ángulo del sector de circunferencia adicional al techo (θ). De aquí se deduce que la altura del piso y mitad de los hastiales es $h = H - r$.

Por inspección inmediata se encuentra las coordenadas de los puntos 1, 4 y 5 están definidos por

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix};$$

Reemplazando los valores de $r = 5.10\,\mathrm{m}$ y $H = 10.2\,\mathrm{m}$ se tiene que

$$1 : \boldsymbol{x}_1 = (0, -5.10)^{\mathrm{T}}.$$

$$4 : \boldsymbol{x}_4 = (5.10, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$5 : \boldsymbol{x}_5 = (0, 5.10)^{\mathrm{T}},$$

Par el caso del punto 3; se lo encontrará a partir de las coordenadas del punto 4 del siguiente modo. Entre los puntos 6, 4 y 3 se tiene un sector circular de radio $r = 5.1\,\mathrm{m}$ y arco de $\theta = \frac{\pi}{9}$ (equivalente a $20\,°$). Los radios $\overline{6\,4}$ y $\overline{6\,3}$

con la secante $\overline{43}$ (que la llamaremos t) forman un triángulo isósceles. De este modo, los ángulos opuestos a los radios son iguales e igual a

$$\varrho = \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{4}{9}\pi.$$

Ahora se aplica el Teorema 1 que sería

$$\frac{t}{\sin\theta} = \frac{r}{\sin\varrho};$$

que la despejar t y evaluando las demás variables se tiene que $t = 1.77\,\mathrm{m}$.

Ahora se busca un triángulo recto con hipotenusa igual al segmento t. Donde el cateto adyacente t_1 y el opuesto t_2 son de forma respectiva

$$t_1 = t\cos\varrho,$$

$$t_2 = t\sin\varrho.$$

Al evaluar los valores de t y ϱ se tiene $t_1 = 0.31\,\mathrm{m}$ y $t_2 = 1.74\,\mathrm{m}$.

Pero estos valores están en valor absoluto, y para tomarlos en cuenta en el sistema coordenado en forma de un vector se hacen negativos, y el vector es

$$\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ -t_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, desde el punto 4 de coordenadas conocidas se encuentra las coordenadas de 3 con el anterior vector

$$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_4 + \boldsymbol{t},$$

que resulta en el siguiente resultado

$$3 : \boldsymbol{x}_3 = (4.79, -1.74)^{\mathrm{T}}.$$

Para el caso del punto 2: éste tiene que formar un segmento $\overline{1\,2}$ que sea horizontal; y además tiene que formar un segmento $\overline{2\,3}$ que es tangente al arco de circunferencia en 3.

La ecuación paramétrica (con parámetro k_1) de la recta que pertenece el segmento $\overline{1\,2}$ es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + k_1 \boldsymbol{u}_{\overline{1\,2}}; \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{u}_{\overline{1\,2}} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$.

Reemplazando los valores de nuestro ejemplo, la ecuación de la línea a la que el segmento $\overline{1\,2}$ pertenece es

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5.1 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo, la ecuación paramétrica (con parámetro k_2) de la recta que pertenece el segmento $\overline{2\,3}$ es

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_3 + k_2 \boldsymbol{u}_{\overline{3\,2}}; \tag{3}$$

donde

$$\boldsymbol{u}_{\overline{3\,2}} = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{u}_{\overline{6\,3}};$$

siendo $\boldsymbol{N}$ una matriz de transformación que obtiene el vector unitario normal a $\boldsymbol{u}_{\overline{6\,3}}$, igual a

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reemplazando los valores de nuestro ejemplo, la ecuación de la línea a la que el segmento $\overline{3\,2}$ pertenece es

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4.79 \\ -1.74 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -0.34 \\ -0.94 \end{pmatrix}.$$

Ahora para obtener la intersección de las dos líneas dadas por sus ecuaciones, se tiene que obtener los parámetros k_1 y k_2 que den esa condición. Eso se logra resolviendo la siguiente ecuación matricial para $\boldsymbol{k}$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{\overline{1\,2}} \cdot \boldsymbol{u}_{\overline{1\,2}} & -\boldsymbol{u}_{\overline{1\,2}} \cdot \boldsymbol{u}_{\overline{3\,2}} \\ \boldsymbol{u}_{\overline{3\,2}} \cdot \boldsymbol{u}_{\overline{1\,2}} & -\boldsymbol{u}_{\overline{3\,2}} \cdot \boldsymbol{u}_{\overline{3\,2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{u}_{\overline{1\,2}} \\ (\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{u}_{\overline{3\,2}} \end{pmatrix} .$$

Resolviendo para los valores de este ejemplo se tiene que

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 3.57 \\ 3.57 \end{pmatrix} .$$

Para encontrar las coordenadas del punto buscado, se puede reemplazar k_1 en la Ec. 2 o k_2 en la Ec. 3. En este caso se hizo el primer reemplazo y se obtuvo que

$$2 : \boldsymbol{x}_2 = (3.57, -5.10)^{\mathrm{T}}.$$

Con esto se tiene todas las coordenadas del lado derecho de la sección. Los puntos del lado izquierdo se obtiene por simetría.

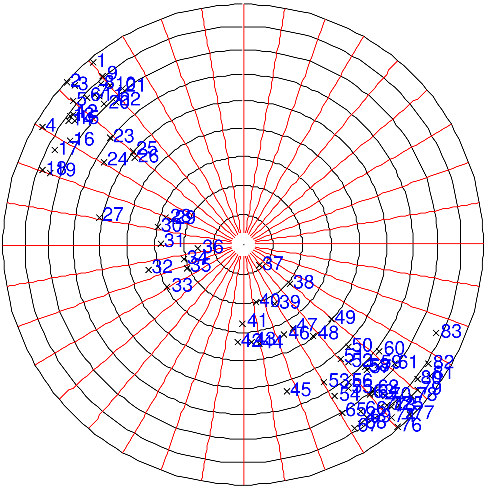
La implementación de esta solución en MATLAB® es la siguiente.

```
seccTotHeight =10.2;
roofRadius =5.1;
seccFloorHeight =seccTotHeight-roofRadius;
thetaRad =1/9*pi;

x6Vec =[ 0; 0 ];
x1Vec =[ 0; -seccFloorHeight ];
x4Vec =[ roofRadius; 0 ];
x5Vec =[ 0; roofRadius ];
varrhoRad =(pi -thetaRad)/2;

tNorm =sin(thetaRad)/sin(varrhoRad) *roofRadius;
t1 =tNorm *cos(varrhoRad);
t2 =tNorm *sin(varrhoRad);
tVec =[ t1; t2 ];

x3Vec =x4Vec +[ -t1; -t2 ];
u12Vec =[ 1; 0 ];

u63Vec =(x3Vec -x6Vec) /norm(x3Vec -x6Vec);
u32Vec =[ 0, 1; -1, 0 ] *u63Vec;
```

```
if dot( u63Vec , u32Vec )==0
    display('Vectors are orthogonal');
end

a11 =dot( u12Vec , u12Vec );
a12 =-dot( u12Vec , u32Vec );
a21 =dot( u12Vec , u32Vec );
a22 =-dot( u32Vec , u32Vec );

c1 =dot( (x3Vec -x1Vec), u12Vec );
c2 =dot( (x3Vec -x1Vec), u32Vec );

aMat =[ a11 , a12; a21 , a22 ];
cVec =[ c1; c2 ];
kVec =aMat \cVec;

x2Vec =x1Vec +kVec(1)*u12Vec;

% All points:
allPtsArray =[ x1Vec , x2Vec , x3Vec , x4Vec , x5Vec , x6Vec ];
display(allPtsArray);
```

Estadística espacial

Ejemplo Encontrar la orientación espacial del eje de un anticlinal a partir de medidas de las orientaciones de los planos en los flancos. Caso de Anticlinal Monterralo, Pie de Monte Llanero, Cordillera Oriental de Colombia [1].



Solución El objetivo es el de hallar el vector del eje del pliegue ($\boldsymbol{f}$) con base a medidas de los planos que forman los flancos ($\boldsymbol{p}_{[i]}$).

Para ello se tiene que minimizar la suma de todos los productos escalares —elevados a la segunda potencia— de cada dirección de los flancos con del vector del eje del pliegue (S) para n medidas,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{p}_{[i]}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}\right)^2.$$

El producto a la segunda potencia $(\boldsymbol{p}_{[i]}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f})^2$ se opera de modo de tener la equivalencia

$$(\boldsymbol{p}_{[i]}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f})^2 = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{p}_{[i]} \boldsymbol{p}_{[i]}^{\mathrm{T}}\right) \boldsymbol{f};$$

Si llamamos $\boldsymbol{T}_{[i]}$ al producto entre los paréntesis $\left(\boldsymbol{p}_{[i]}\boldsymbol{p}_{[i]}^{\mathrm{T}}\right)$ tenemos

$$S = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}\boldsymbol{T}_{[i]}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}.$$

Pero $\boldsymbol{f}$ es constante, entonces

$$S = \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{T}_{[i]}\right)\boldsymbol{f}.$$

La minimización de S se puede encontrar de obtener la descomposición en valores propios de una matriz semejante

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{T}_{[i]}{}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}},$$

luego de escoger el menor valor propio. De este modo, el vector asociado a este menor valor propio resultaría ser el vector buscado $\boldsymbol{f}$.

Bibliografía para iniciar

[1] L.A. Steen, editor. *Mathematics tomorrow*. Springer, New York, 1 edition, 1981.

[2] A.B. Vistelius. *Studies in mathematical geology*. New York Consultants Bureu, New York, 1967. Translation of selected articles of Vistelisu form Russian to English.

Referencias

[1] N.F. Sanchez-Villar. Desarrollo de patrones de fracturamiento y mecanismos de deformación del anticlinal de Monterralo, Pie de Monte Llanero, Cordillera Oriental de Colombia. Msc. thesis, Departamento de Geociencias, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá DC, 2011.

[2] L.O. Suárez-Burgoa, Y. Valencia-González, O. Ordónez-Carmona, A.A. Navarro-Montoya, and B. Hidalgo-Gómez. Ingeniería de rocas en el túnel de conducción superior del proyecto hidroeléctrico Porce III, Colombia. *Boletín de Ciencias de la Tierra*, 26:69–86, 2010.